

Zhukovskiy E.S., Alves M.J. EQUATIONS WITH VOLTERRA ON A SYSTEM OF RELATIONS COVERING MAPPINGS OF METRIC SPACES

The paper is concerned with solvability of a general type equation with a generalized Volterra mapping of metric spaces. The Volterra property is defined as the property of a mapping to preserve an equivalence relation system. Under a proper choice of a system of relations, this concept is equivalent to the known interpretations of the evolution property, causality of operators, including the classical definition of Volterra property in the sense of A.N. Tikhonov. A theorem on existence and continuation of solutions is proved; statements about covering mappings of metric spaces are used.

Key words: Volterra equation; local solutions; continuation of solutions; generalized Volterra equation; covering mapping of metric spaces.

УДК 517.968.4

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

© Е.С. Жуковский, Ж.П. Муембе, Е.А. Плужникова

Ключевые слова: векторные накрывающие отображения метрических пространств; функциональные уравнения; запаздывание.

Рассматривается система уравнений неявного вида с запаздывающим аргументом в пространстве суммируемых с любой степенью вектор-функций, имеющих значения в заданном множестве. Получены условия существования решения на заданном интервале времени. Исследование основано на утверждениях о векторных накрывающих отображениях.

Данная работа продолжает исследования [1] функциональных уравнений методами теории накрывающих отображений. Рассматривается уравнение неявного вида с запаздывающим аргументом в пространстве суммируемых с любой степенью функций, имеющих значения в заданном множестве. Исследование основано на результатах работы [2] о векторных накрывающих отображениях. Используется определение накрывающего и условно накрывающего отображения из [3].

Обозначим $\text{cl}(\mathbb{R}^l)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^l$. Пусть задано $1 \leq p \leq \infty$ и измеримое (многозначное) отображение $\Omega: [a, b] \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^l)$, для которого $\rho_{\mathbb{R}^l}(0, \Omega) \in L_p([a, b], \mathbb{R})$, где $\rho_{\mathbb{R}^l}(0, \Omega(t)) = \inf_{\omega \in \Omega(t)} |\omega|$. Определим полное метрическое пространство $L_p([a, b], \Omega)$ суммируемых в p -ой степени, если $1 \leq p < \infty$, и существенно ограниченных при $p = \infty$ функций $t \in [a, b] \mapsto y(t) \in \Omega(t)$, с метрикой

$$\rho_{L_p}(y_1, y_2) = \left(\int_a^b |y_1(s) - y_2(s)|^p ds \right)^{1/p}, \quad p \neq \infty; \quad \rho_{L_\infty}(y_1, y_2) = \text{vrai sup}_{s \in [a, b]} |y_1(s) - y_2(s)|.$$

Пусть заданы числа $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$; измеримые отображения $\Omega: [a, b] \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^{l_1})$, $\Theta: [a, b] \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^{l_2})$, для которых $\rho_{\mathbb{R}^{l_1}}(0, \Omega) \in L_{p_1}([a, b], \mathbb{R})$, $\rho_{\mathbb{R}^{l_2}}(0, \Theta) \in L_{p_2}([a, b], \mathbb{R})$; удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g: [a, b] \times \mathbb{R}^{l_1} \rightarrow \mathbb{R}^{l_2}$ такая, что $g(t, \Omega(t)) \subset \Theta(t)$ при почти всех $t \in [a, b]$. В случае $p_1 \neq \infty$ относительно функции g будем предполагать, что существуют $\eta \in L_{p_2}([a, b], \mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in \Omega(t)$

выполнено неравенство $|g(t, x)| \leq \lambda |y|^{p_1/p_2} + \eta(t)$. Если $p_1 = \infty$, то при любом $r > 0$ пусть существует такая функция $\eta_r \in L_{p_2}([a, b], \mathbb{R})$, что $|g(t, x)| \leq \eta_r(t)$ при почти всех $t \in [a, b]$ и любых $x \in \Omega(t)$ таких, что $|x| \leq r$. Эти условия являются необходимыми и достаточными для действия из $L_{p_1}([a, b], \Omega)$ в $L_{p_2}([a, b], \Theta)$ оператора Немыцкого $(N_g x)(t) = g(t, x(t))$. Кроме того, при их выполнении оператор $N_g : L_{p_1}([a, b], \Omega) \rightarrow L_{p_2}([a, b], \Theta)$ в случае $p_1 \neq \infty$ является непрерывным и ограниченным, а при $p_1 = \infty$ — замкнутым и ограниченным.

Т е о р е м а 1 [2]. Пусть существует такое $\alpha_g > 0$, что при п.в. $t \in [a, b]$ отображение $g(t, \cdot) : \Omega(t) \rightarrow \Theta(t)$ является условно α_g -накрывающим. Тогда оператор Немыцкого $N_g : L_{p_1}([a, b], \Omega) \rightarrow L_{p_2}([a, b], \Theta)$ будет условно α_N -накрывающим с константой $\alpha_N = (b-a)^{-(p_2-p_1)/(p_1 p_2)} \alpha_g$; в частности, при $p_1 = p_2$ константы накрывания равны: $\alpha_N = \alpha_g$, в случае $p_1 < p_2 = \infty$ выполнено $\alpha_N = (b-a)^{-1/p_1} \alpha_g$. Аналогично, если при п.в. $t \in [a, b]$ отображение $g(t, \cdot) : \Omega(t) \rightarrow \Theta(t)$ является α_g -накрывающим, то оператор Немыцкого $N_g : L_{p_1}([a, b], \Omega) \rightarrow L_{p_2}([a, b], \Theta)$ будет α_N -накрывающим.

Приведенное утверждение позволяет применить результаты [2] о векторных накрывающих отображениях к исследованию функциональных уравнений. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} g_i(t, x_i(t), x_1(h_{i1}(t)), x_2(h_{i2}(t)), \dots, x_n(h_{in}(t))) &= y_i(t), \quad x_i(t) \in \Omega_i(t), \quad t \in [a, b]; \\ x_i(s) &= \chi_i(s), \quad \text{если } s \notin [a, b]; \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь функции $g_i : [a, b] \times \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют условиям Каратеодори, функции $h_{ij} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi_i : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega_i : [a, b] \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R})$ измеримы, и при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место неравенство $h_{ij}(t) \leq t$, $i, j = \overline{1, n}$. Пусть, кроме того, почти всюду на $[a, b]$ справедливы соотношения $g_i(t, \Omega_i(t), \Omega_1(t), \Omega_2(t), \dots, \Omega_n(t)) \subset \Theta_i(t)$, $y_i(t) \in \Theta_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, где $\Theta_i : [a, b] \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R})$ — заданное измеримое отображение.

Пусть для некоторых чисел $1 \leq p_{1i} \leq p_{2i} \leq \infty$, $i = \overline{1, n}$, выполнены включения $\rho_{\mathbb{R}}(0, \Omega_i) \in L_{p_{1i}}([a, b], \mathbb{R})$, $\rho_{\mathbb{R}}(0, \Theta_i) \in L_{p_{2i}}([a, b], \mathbb{R})$, $i = \overline{1, n}$. Определим множества

$$J_{\infty} = \{i \in \overline{1, n} : p_{1i} = \infty\}, \quad J = \{i \in \overline{1, n} : p_{1i} < \infty\}.$$

Если эти оба множества не пусты, то для произвольного $i \in \overline{1, n}$ будем предполагать выполненным следующее условие: существует функция $\eta_i \in L_{p_{2i}}([a, b], \mathbb{R})$, при любом $r > 0$ существует функция $\eta_{ri} \in L_{p_{2i}}([a, b], \mathbb{R})$, и для каждого $j \in J$ существует $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ такие, что при всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{j=\overline{1, n}} \Omega_j(t)$, компоненты которых с номерами $j \in J_{\infty}$ удовлетворяют неравенству $|x_j| \leq r$, выполнено

$$|g_i(t, x_i, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \eta_{ri}(t) + \eta_i(t) + \sum_{j \in J} \lambda_{ij} |x_j|^{p_{1j}/p_{2i}}. \quad (2)$$

Если $J_{\infty} = \emptyset$, то данное условие превращается в

$$\exists \eta_i \in L_{p_{2i}}([a, b], \mathbb{R}) \quad \exists \lambda_{ij} \in \mathbb{R} \quad |g_i(t, x_i, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \eta_i(t) + \sum_{j \in J} \lambda_{ij} |x_j|^{p_{1j}/p_{2i}}.$$

В случае $J = \emptyset$ условие (2) принимает вид

$$\forall r > 0 \quad \exists \eta_{ri} \in L_{p_{2i}}([a, b], \mathbb{R}) \quad |g_i(t, x_i, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \eta_{ri}(t).$$

Далее, предполагается что при любых $i, j = \overline{1, n}$ функция $h_{i,j} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию [4, с. 707]: для любого измеримого множества $e \subset \mathbb{R}$, мера которого $\text{mes}(e) < \infty$, множество $h^{-1}(e) = \{t \in [a, b] : h(t) \subset e\}$ измеримо, и выполнено

$$\sup_{e : \text{mes}(e) > 0} \frac{\text{mes}(h^{-1}(e))}{\text{mes}(e)} < \infty.$$

Решением считаем функцию $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{j=\overline{1,n}} L_{p_{1j}}([a, b], \Omega_j)$, удовлетворяющую при п.в. $t \in [a, b]$ уравнениям и включениям (1).

Принятые предположения позволяют представить рассматриваемую систему функциональных уравнений в виде системы операторных уравнений

$$N_{g_i}(x_i, S_{h_{i1}}x_1, S_{h_{i2}}x_2, \dots, S_{h_{in}}x_n) = y_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где оператор Немыцкого $N_{g_i} : L_{p_{1i}}([a, b], \Omega_i) \times \prod_{j=\overline{1,n}} L_{p_{1j}}([a, b], \Omega_j) \rightarrow L_{p_{2i}}([a, b], \Theta_i)$ и оператор внутренней суперпозиции $S_{h_{ij}} : L_{p_{1j}}([a, b], \Omega_j) \rightarrow L_{p_{1j}}([a, b], \Omega_i)$ определяются равенствами

$$(N_{g_i}(x_i, x_1, x_2, \dots, x_n))(t) = g_i(t, x_i(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

$$(S_{h_{ij}}x)(t) = \begin{cases} x(h_{ij}(t)), & \text{если } t \in E_{ij}, \\ \chi(h_{ij}(t)), & \text{если } t \in \overline{E}_{ij}; \end{cases} \quad E_{ij} = h_{ij}^{-1}([a, b]), \overline{E}_{ij} = [a, b] \setminus E_{ij}, i, j = \overline{1, n}.$$

Теорема 1 дает условия накрывания оператора Немыцкого по первому аргументу. Если по остальным аргументам этот оператор липшицев, то к системе (3) применима теорема [2] о векторных накрывающих отображениях. Таким образом получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Пусть существуют такие измеримые функции $\alpha_i : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$, $\beta_{ij} : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $i, j = \overline{1, n}$, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполнены условия: при любом $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{j=\overline{1,n}} \Omega_j(t)$ отображения $g_i(t, \cdot, x) : \Omega_i(t) \rightarrow \Theta_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, являются условно $\alpha_i(t)$ -накрывающими и $y_i(t) \in g_i(t, \Omega_i(t), x)$; для любых $i, j = \overline{1, n}$ и всех $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \prod_{k \neq j} \Omega_k(t)$, $u_i \in \Omega_i(t)$ отображения $g_i(t, u_i, x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n) : \Omega_j(t) \rightarrow \Theta_i(t)$ являются $\beta_{ij}(t)$ -липшицевыми; существует такое $q < 1$, что матрица $C(t)_{n \times n}$ с компонентами

$$c_{ij}(t) = \begin{cases} (b-a)^{(p_{2i}-p_{1i})/(p_{1i}p_{2i})} \alpha_i^{-1}(t) \beta_{ij}(t), & \text{если } t \in E_{ij}, \\ 0, & \text{если } t \in \overline{E}_{ij}; \end{cases}$$

имеет спектральный радиус $\rho(C(t)) \leq q$. Тогда система уравнений (1) разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об исследовании систем функциональных уравнений методами теории накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 1. С. 38-42.
2. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439-455.
3. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. № 5. С. 613-634.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00626) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013гг. (соглашение № 14.132.21.1348).

Zhukovskiy E.S., Munembe J.P., Pluzhnikova E.A. FUNCTIONAL EQUATIONS WITH DELAY IN THE SPACE OF SUMMABLE FUNCTIONS

We consider a system of equations of implicit form with delay in the space of summable with any degree vector-functions with values in the given set. We obtain conditions for the existence of solutions for a given interval of time. The study is based on allegations of covering vector maps.

Key words: vector covering maps of metric spaces; functional equations; the delay.

УДК 512.7

ЛИЕВЫЕ И ТРОЙНЫЕ ЛИЕВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА АЛГЕБРАХ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

© И.М. Жураев

Ключевые слова: алгебра фон Неймана; локально измеримый оператор; дифференцирование; лиевое дифференцирование; тройное дифференцирование; центрозначный след. Доказано, лиевое и тройные лиевое дифференцирование на алгебрах локально измеримых операторов имеет стандартный вид, т. е. однозначно разлагается в сумму дифференцирования и центрозначного следа.

Пусть A – произвольная ассоциативная алгебра. Линейный оператор $D: A \rightarrow A$ называется (*ассоциативным*) *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ при всех $x, y \in A$. Каждый элемент $a \in A$ определяет дифференцирование D_a в алгебре A по правилу $D_a(x) = ax - xa = [a, x]$, $x \in A$. Дифференцирования вида D_a называются *внутренними*. Линейный оператор $L: A \rightarrow A$ называется *тройным лиевым дифференцированием*, если $L([x, y], z) = [[L(x), y], z] + [[x, L(y)], z] + [[x, y], L(z)]$, $\forall x, y, z \in A$, где $[x, y] = xy - yx$ коммутатор элементов x, y .

Обозначим через $Z(A)$ центр алгебры A . Линейный оператор $\tau: A \rightarrow Z(A)$ называется *центрозначным следом* на A , если $\tau(xy) = \tau(yx)$ для всех $x, y \in A$. Каждый центрозначный след на алгебре A является примером лиевого дифференцирования, не являющегося, как правило, ассоциативным дифференцированием.

Пусть H – гильбертово пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H , M – подалгебра фон Неймана в $B(H)$.

Множество $LS(M)$ всех операторов, локально измеримых относительно M , является унитарной $*$ -алгеброй над полем $\mathbb{C}$ относительно операций сильного сложения и умножения и перехода к сопряженному оператору, при этом M есть $*$ -подалгебра в $LS(M)$ [3, §2, 3].

Следующая теорема устанавливает связь между ассоциативными дифференцированиями и тройными лиевыми дифференцированиями в $*$ -алгебре – $LS(M)$.

Т е о р е м а 1. *Если алгебра фон Неймана не содержит прямого абелево слагаемого, то любое тройное лиево дифференцирование $L: LS(M) \rightarrow LS(M)$ имеет вид $L = D + \tau$, где D – ассоциативное дифференцирование и τ – центрозначный след из $LS(M)$ в $Z(LS(M))$.*

Пусть теперь M – алгебра фон Неймана типа I_∞ , либо типа III. В этом случае, как показано в [1], [2], любое (ассоциативное) дифференцирование на $LS(M)$ является внутренним. Таким образом, из теоремы 1 вытекает следующее

С л е д с т в и е 1. *Пусть M алгебра фон Неймана типа I_∞ либо типа III. Тогда любое тройное лиево дифференцирование $L: LS(M) \rightarrow LS(M)$ представимо в виде*

$$L = D + \tau,$$

где D – внутреннее дифференцирование на $LS(M)$, а τ – центрозначный след на $LS(M)$.